סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

משוואה ממעלה ראשונה

סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax=b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x=\frac{b}{a}$ כאשר $a\neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

א. $-7x+5+2x=4x-13$

ב. $x-2+5x=4-3x-5+7x+7$

2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

א. $3(x-1)-4=2$

ב. $6(4-x)-(6-x)=3x$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3}-\frac{x}{9}=-4$

ב. $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}x=x-\frac{7}{15}$

ג. $\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2$

4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

א. $\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2}$

ב. $\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x}$

ג. $\frac{1}{4x}+\frac{3}{x}=\frac{13}{2}$

5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15}$

ב. $\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0$

ג. $\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0$

תשובות סופיות

1) א. $x=2$ ב. $x=4$

2) א. $x=3$ ב. $x=2\frac{1}{4}$

3) א. $x=-18$ ב. $x=-1$ ג. $x=-10$

4) א. $x=-3$ ב. $x=2$ ג. $x=\frac{1}{2}$

5) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון

סיכום כללי

משוואה ממעלה ראשונה

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax=b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a\neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x=\frac{b}{a}$.

כאשר $a=0$ מתקבלת המשוואה $0\cdot x=b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b=0$ את המשוואה היא $0x=0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b\neq 0$ את המשוואה היא $0x=b\neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $x+4=6+x$

2) $3x+6-x=4+2x+2$

3) $6(x-2)=2x+5+4x$

4) $5x-3+x=4x+2x-3$

תשובות סופיות

1) אף פתרון.
2) אינסוף פתרונות.
3) אין פתרון.
4) אינסוף פתרונות.

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

סיכום כללי

הגדרה

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

כאשר $a_1\ ,b_1\ ,c_1$ ו- $a_2\ ,b_2\ ,c_2$ הם מקדמים מספריים.

דוגמאות למערכות של משוואות: $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} y=3x-1 \\ \frac{x+3}{2}=y+6 \end{cases}$.

פתרון של מערכת משוואות

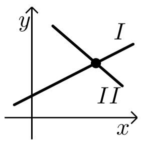
פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות

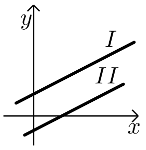
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:

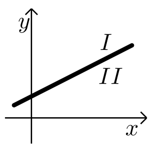
- הישרים נחתכים:
  במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:
  במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:
  במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.



פתרון אלגברי של מערכת משוואות

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.

- פתרון ע"י השוואת מקדמים:

1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x+3y=5 \\ x-3y=3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 5x+2y=14 \\ 5x+3y=23 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 5y=2x \\ 4x=5y+8 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 4x=3y-29 \\ 5y=9-13x \end{cases}$

2) פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=5 \end{cases}$.

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases}$

4) פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=-7 \end{cases}$.

5) פתור את המשוואה הבאה: $\begin{cases} 5x-4xy=22 \\ 6x+xy=-20 \end{cases}$.

תשובות סופיות

1) א. $\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5},9\right)$ ג. $(4,1.6)$ ד. $(-2,7)$

2) א. אין פתרון.

3) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$

4) $(-3,1)$

5) $(-2,4)$

משוואה ממעלה שנייה

סיכום כללי

משוואה מהצורה: $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

1. **משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2+5x-4=0$.

2. **משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2+4x+4=0$.

3. **משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2+x+4=0$.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2+3x-10=0$

ב. $25x^2-20x+4=0$

2) פתור את המשוואות הבאות:

א. $2(x-5)^2-(2x-3)^2=10x+21$

ב. $(2x-1)^2+x(2x+3)=(x-1)(x-7)$

3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b): $32x^2-18=0$.

4) פתור את המשוואה הבאה (משוואה חסרת c): $5x^2-x=0$.

5) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x}$

ב. $\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18$

ג. $\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0$

תשובות סופיות

1) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-5$ ב. $x=\frac{2}{5}$

2) א. $x_1=1\ ,\ x_2=-10$ ב. $x_1=0.6\ ,\ x_2=-2$

3) $x=\pm\frac{3}{4}$

4) $x_1=0\ ,\ x_2=\frac{1}{5}$

5) א. $x_1=2\ ,\ x_2=-1.2$ ב. $x=5\ ,\ x\neq-3$ ג. $x_1=0\ ,\ x_2=-5$

מערכת משוואות ממעלה שנייה

סיכום כללי

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות), שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע.
למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=6 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3x^2+4y^2=16 \\ 5x^2-3y^2=17 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{4}{y}-\frac{1}{x}=-19 \end{cases}$$

תשובות סופיות

4) $(2,4),(4,2)$

5) $(\pm2,\pm1)$

6) $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)$

משוואות דו-ריבועיות

סיכום כללי

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4+bx^2+c=0$ כאשר הנעלם הוא x.
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2=t \rightarrow at^2+bt+c=0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x.

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4,
כגון $(x^2-1)^2+3(x^2-1)-2=0$, באמצעות פרמטר: $t=x^2-1$,
ובכך לפתור משוואה: $t^2+3t-2=0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x.
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות,
כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $5x^4+3x^2-8=0$

2) $x^2(x^2+1)=10(3x^2-10)$

3) $x^3+4=\frac{32}{x^3}$

4) $x-9\sqrt{x}+14=0$

תשובות סופיות

1) $x=\pm 1$
2) $x=\pm 2, \pm 5$
3) $x=-2, \sqrt[3]{4}$
4) $x=49$

משוואות עם פרמטרים

סיכום כללי

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגי גדלים – משתנים ופרמטרים.
את המשתנים מקובל לסמן באותיות x, y ו- z, ואת הפרמטרים בשאר האותיות.
פתרון המשוואה יתקבל על ידי בידוד המשתנה, כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה, למשל פתרון המשוואה: $mx=4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x=\frac{4}{m}$, אשר מבוטא באמצאות הפרמטר m.
בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל, תחום ההגדרה הוא $m\neq 0$.

שאלות

1) פתור את המשוואות הבאות:

א. $3x-b=(b+1)x-6$

ב. $\frac{m+1}{x-1}=\frac{m-1}{x+1}$

2) פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x+my=1 \\ x+y=m \end{cases}$.

3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות:

א. $x^2-2mx+m^2-1=0$

ב. $x^2+m(x+10)=2m^2-5x$

תשובות סופיות

1) א. $b\neq 2$, $x=\frac{b-6}{2-b}$ ב. $x=-m$

2) $m\neq 1$, $(m+1,-1)$

3) א. $x=m+1,\mathrm{m}-1$ ב. $x=m-5,-2m$

משוואות עם שורשים

סיכום כללי

פתרון משוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$, יתקבל על ידי העלאה בריבוע של שני אגפי-המשוואה, באופן הבא: $\left(\sqrt{x}\right)^2=(a)^2 \quad \to \quad x=a^2$.

הערות

1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x}=a$, שבה $a<0$, אין פתרון.
3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש, יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\sqrt{2x+5}=7$
2) $\sqrt{x+2}=x$
3) $\sqrt{3x+1}+x=13$
4) $\sqrt{2x+7}+4=x$
5) $\sqrt{x-1}+3=x$
6) $\sqrt{10x+6}+9=x$
7) $\sqrt{x+6}-2=2x$

תשובות סופיות

1) $x=22$
2) $x=2$
3) $x=8$
4) $x=9$
5) $x=5$
6) $x=25$
7) $x=0.25$

משוואות עם ערך מוחלט

סיכום כללי

הגדרה

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.
כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס),
ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $|3x+14| = 7$

2) $|12-x| = 3x$

3) $2x - |8-x| = 10$

4) $|x+2| + 6 = |2x-4|$

תשובות סופיות

1) $x = -\frac{7}{3},\ -7$ **2)** $x = 3$ **3)** $x = 6$ **4)** $x = 12, -1\frac{1}{3}$